TEMATIK: Jurnal Konten Pendidikan Matematika
Volume 2, Number 2, Tahun 2024, pp. 65-71
ISSN: 2985-8844
Open Access: http://doi.org/10.55210/jkpm

Deskripsi Waktu Pesanan dan Permintaan Pada Sistem Persediaan

Darwin Djeni

Universitas Islam Zainul Hasan Genggong, Probolinggo, Indonesia
Email : darwindjeni49.inzah@gmail.com

INFORMASI ARTIKEL

Tersedia Online pada:
28 Agustus 2024

Kata Kunci:
Sistem Persediaan, Stok, Pesanan

Keywords:
Please Inventory System, Stock, Orders

Abstrak

Teori sistem persediaan untuk satu item, dengan tingkat pemesanan ulang (r) dan jumlah unit pesanan (q). Tujuan menguraikan pengaruh waktu pengiriman pesan dan ketidakpastian dalam permintaan terhadap sistem persediaan (r, q). Permintaan dalam sistem ini diasumsikan sebagai proses Poisson. Penulis membuat estimasi biaya rata-rata jangka panjang dalam model persediaan (r, q) yang terhubung dengan biaya dalam metode stok dasar. Marginal analisis boleh digunakan untuk menentukan tahap pemesanan semula yang terbaik dan jumlah pesanan yang optimum. Didapatkan bahwa waktu pesan berdampak pada tingkat pemesanan ulang, tingkat kapasitas persediaan, dan biaya optimal yang lebih rendah.

Abstract

Inventory system theory for one item, with reorder level (r) and number of units ordered (q). The objective describes the influence of message delivery times and uncertainty in demand on the inventory system (r, q). Demand in this system is assumed to be a Poisson process. The author estimates long-term average costs in the inventory model (r, q) which are connected to costs in the basic stock method. Marginal analysis can be used to determine the best reorder level and optimum order quantity. It was found that order time had an impact on reorder levels, inventory capacity levels, and lower optimal costs.

PENDAHULUAN

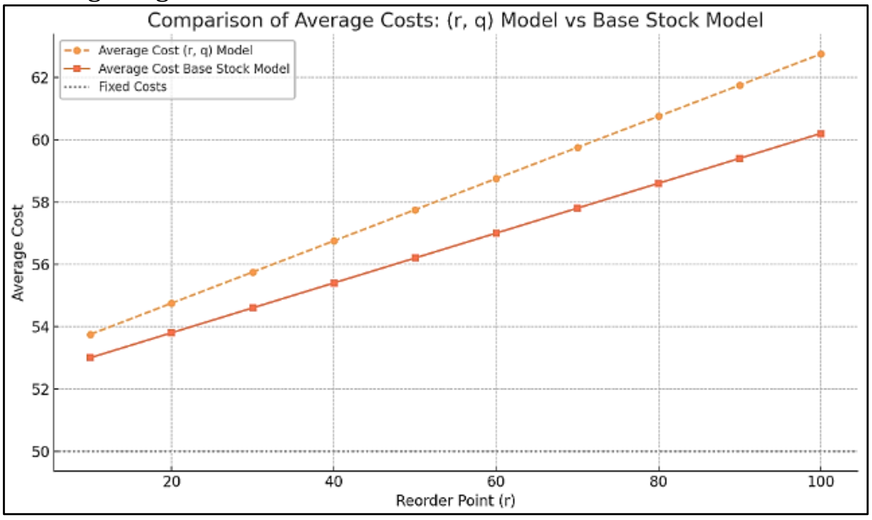
Suatu model persediaan timbul dari pada insiden-insiden yang kerap berlaku dalam operasi perniagaan, sama ada dalam sektor perdagangan maupun industri. Jika persediaan barang berlebihan, biaya pergudangan yang signifikan akan dikeluarkan oleh perusahaan. Akan tetapi, apabila persediaan barang terlalu sedikit, dapat menimbulkan kekurangan barang yang berpotensi mengurangi jumlah pembeli atau menimbulkan biaya tambahan untuk pengadaan barang dengan cepat. Menginkar pesanan barang yang sesuai bisa menaikan efisiensi pengeluaran jangka panjang perusahaan. Pesanan barang terkait dengan waktu pemesanan dan durasi proses pengiriman dalam sistem.

Sistem persediaan adalah sistem yang mengelola kebijakan pengelolaan stok. Persediaan sistem terbagi menjadi dua, yaitu deterministik dan probabilistik. Model sistem persediaan probalistik merupakan model yang paling mendekati masalah nyata. Sistem persediaan (r, q) ini adalah sistem persediaan yang melibatkan faktor probabilitas, di mana r adalah level dari pesanan ulang dan q adalah kuantitas barang yang dipesan setiap kali pemesanan dilakukan. Terdapat suatu model sistem persediaan *base stock* merupakan model persediaan probabilistik yang mempertimbangkan permintaan waktu tunggu dan tingkat stok pada saat yang bersamaan. Model kebijakan stok dasar bertujuan untuk mengurangi biaya rata-rata yang terkait dengan biaya penyimpanan dan kekurangan stok, di mana biaya rata-rata direpresentasikan sebagai $G(r)$ (Song, 1994a).

Dengan dasar itu, peneliti menjelaskan teori biaya rata-rata jangka panjang $c(r, q)$ pada model persediaan (r, q) yang dikaitkan dengan model *base stock*. Dalam hal membandingkan 2 ulasan kontinu sistem persediaan (r, q) dengan item tunggal, penulis menganalisis pengaruh dari waktu pesan terhadap titik *reorder* optimal (r^*), jumlah pesanan optimal (q^*), kapasitas

*Corresponding author.
E-mail addresses: darwindjeni49.inzah@gmail.com

persediaan optimal $(r^* + q^*)$, dan biaya rata-rata optimal $c^*(r^* + q^*)$ pada sistem persediaan (r, q) yang terhubung dengan model *base stock*.



Gambar1. Diagram perbandingan antara model persediaan *(r,q)* dan *base stock*

METODE

Peneliti mengeksplorasi dan membuktikan teorema dan lemma yang merujuk pada jurnal yang berjudul "*The Effect of Lead Time in (r,q) Inventory System*" yang dibuat oleh Jing-Sheng Song pada tahun 2010. Bagi tahapan-tahapan yang akan dijalani, adalah seperti berikut ini:

- Mengatur model konstruksi sistem persediaan kontinu dengan metode ulasan (r, q).
- Menentukan bukti untuk teorema 1 mengenai bagaimana *lead time* mempengaruhi *reorder point* dengan nilai q yang ditetapkan tertentu $[r^*(q)]$.
- Mengonfirmasi teorema 2 tentang bagaimana waktu tunggu memengaruhi tingkat pemesanan optimal $(r^* + q^*)$.
- Mengonfirmasi teorema kemungkinan tentang perbedaan batas optimal dari biaya rata-rata kedua sistem.
- Menyusun bagian pembahasan dan menarik garis kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan matematika bisa kompleks jika mempertimbangkan semua kemungkinan batasan, pada model sistem persediaan (r, q) disederhanakan dengan berbagai asumsi berikut :

Item tersebut terdapat pada kedua sistem persediaan tunggal. Kedua sistem tersebut sama persis kecuali dalam hal distribusi waktu tunggu. Kedua sistem itu diberi indeks dengan i $(i = 1,2)$. Permintaan dari setiap sistem persediaan mengikuti distribusi Poisson dengan laju lamda (λ). Jarak antara pesanan berturut-turut merupakan suatu hal yang tak terduga namun tidak tergantung satu sama lain dan didistribusikan secara identik $(i.i.d)$. Jika q unit barang datang, biaya pesanan akan sebesar K. Biaya penyimpanan linier sebesar h per unit per satuan waktu. Pesanan yang tidak dapat segera dipenuhi dari stok yang masih tersedia disebut sebagai *backordered*. Ini berarti bahwa semua permintaan tertunda dan tidak ada penjualan yang terlewat di mana dikenakan biaya penalti sebesar p per unit.

Lemma 1. Untuk sebarang sistem $i = 1,2$ dan y yang ditetapkan.

i) $\frac{C_i(q,y)}{q}$ tidak menurun di q

ii) $r_i^*(q)$ tidak naik dan $r_i^*(q) + q$ tidak menurun di q

Bukti Lemma 1

i) Andaikan benar bahwa $\frac{C_i(q,y)}{q}$ tidak turun di q

Maka akan ditunjukkan untuk sebarang q', q^* dengan $q^* = q$ dan $q' = q+1$ untuk sistem i dan nilai y yang ditetapkan berlaku:

$$\frac{C_i\left(q^*, y\right)}{q^*} \leq \frac{C_i\left(q', y\right)}{q'} \Leftrightarrow \frac{C_i\left(q', y\right)}{q'} - \frac{C_i\left(q^*, y\right)}{q^*} \geq 0$$

Bukti :

$$\frac{C_i\left(q', y\right)}{q'} - \frac{C_i\left(q^*, y\right)}{q^*} = \frac{\sum_{x=1}^{q+1} \Psi_i\,(y+x)}{q+1} - \frac{\sum_{x=1}^{q} \Psi_i\,(y+x)}{q}$$

$$\frac{1}{q+1}\sum_{x=1}^{q+1} \Psi_i\,(y+x) - \frac{1}{q+1}\left(\frac{q+1}{q}\right)\sum_{x=1}^{q} \Psi_i\,(y+x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q+1}\left[\frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q} \Psi_i\,(y+q+1) - \Psi_i\,(y+x)\right]$$

karena $\sum_{x=1}^{q}\left[\Psi_i\,(y+q+1) - \Psi_i\,(y+x)\right] \geq 0$ maka

$$\frac{1}{q+1}\frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q}\left[\Psi_i\,(y+q+1) - \Psi_i\,(y+x)\right] \geq 0$$

$$\therefore \frac{C_i(q^*, y)}{q^*} \leq \frac{C_i(q', y)}{q'} \blacksquare$$

Hasil pembuktian menunjukkan bahwa $\frac{C_i(q',y)}{q'}$ tidak turun seiring peningkatan q, menunjukkan efisiensi biaya rata-rata per unit saat jumlah barang yang dipesan lebih besar.

ii) Diketahui untuk sebarang sistem $i = 1{,}2$ dan y yang ditetapkan

$$r_i^*(q) = \ min\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{q} C_i(q, y) \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

Akan dibuktikan $r_i^*(q)$ tidak naik artinya $r_i^*(q) \geq r_i^*(q+1)$

Ambil sebarang q', q^* dengan $q^* = q < q+1 = q'$ untuk sistem i dan nilai y yang ditetapkan didapat :

$$r_i^*(q^*) = \ min\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{q^*} C_i(q^*, y) \geq \frac{p}{p+h}\right\} = \ min\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{q} C_i(q, y) \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

dan

$$r_i^*(q') = \ min\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{q'} C_i(q', y) \geq \frac{p}{p+h}\right\} = \ min\left\{y \,\middle|\, \frac{1}{q+1} C_i(q+1, y) \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

Berdasarkan Lemma 1 i) maka didapat :

$$\frac{p}{p+h} \leq \frac{C_i(q^*, y)}{q^*} \leq \frac{C_i(q', y)}{q'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{p+h} \leq \frac{\sum_{x=1}^{q^*} \Pr\{D_i \leq y+x\}}{q^*} \leq \frac{\sum_{x=1}^{q'} \Pr\{D_i \leq y+x\}}{q'}$$

Karena $\sum_{x=1}^{q} \Pr\{D_i \leq y + x\} \leq \sum_{x=1}^{q+1} \Pr\{D_i \leq (y-1) + x\}$ maka

$$\Leftrightarrow \frac{p}{p+h} \leq \frac{\sum_{x=1}^{q^*} \Pr\{D_i \leq y + x\}}{q^*} \leq \frac{\sum_{x=1}^{q'} \Pr\{D_i \leq (y-1) + x\}}{q'}$$

Karena itu didapat :

$$r_i^*\left(q^*\right) = \min\left\{y \,\middle|\, \frac{\sum_{x=1}^{q^*} \Pr\left\{D_i \leq y + x\right\}}{q^*} \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

$$\geq \min\left\{y \,\middle|\, \frac{\sum_{x=1}^{q'} \Pr\left\{D_i \leq (y-1) + x\right\}}{q'} \geq \frac{p}{p+h}\right\} = r_i^*\left(q'\right)$$

$$\Leftrightarrow r_i^*\left(q^*\right) \geq r_i^*\left(q'\right)$$

Dengan kata lain, $r_i^*(q)$ tidak naik di q.

Selanjutnya akan dibuktikan $r_i^*(q) + q$ tidak turun di q.

Diketahui

$$r_i^*(q) + q = \min\left\{y | Pr\left\{D_i + U_i(q) \leq y\right\} \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

Ambil sebarang q', q^* dengan $q^* = q < q + 1 = q'$ untuk sistem i dan nilai y yang ditetapkan dididapat :

$$r_i^*\left(q^*\right) + q^* = \min\left\{y | Pr\left\{D_i + U_i(q^*) \leq y\right\} \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

$$= \min\left\{y | Pr\left\{D_i + U_i(q) \leq (y + U_i(q)) - U_i(q)\right\} \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

$$\leq \min\left\{y | Pr\left\{D_i + U_i(q+1) \leq (y + U_i(q+1)) - U_i(q+1)\right\} \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

$$= \min\left\{y | Pr\left\{D_i + U_i(q') \leq y\right\} \geq \frac{p}{p+h}\right\} = r_i^*\left(q'\right) + q'$$

$$\therefore r_i^*\left(q'\right) + q' \geq r_i^*\left(q^*\right) + q^*.$$

Dengan kata lain, $r_i^*(q)$ tidak turun di q.

Dengan demikian, terbukti bahwa $r_i^*(q)$ tidak naik dan $r_i^*(q) + q$ tidak menurun.■

Teorema : *Jika $L_1 \geq_{st} L_2$ maka untuk sebarang q yang diberikan berlaku $r_1{}^*(q) \geq r_2{}^*(q)$*

Bukti :

Dari definisi, untuk $i = 1,2$

$$r_i^*(q) = \min\left\{y | \Pr(D_i - U_i(q) \leq y) \geq \frac{p}{p+h}\right\}$$

Karena $L_1 \geq_{st} L_2$ didapat dari akibat Lemma 3)

$D_1 - U_1(q) \geq_{st} D_2 - U_2$

Hal ini berarti, menurut definisi stokastik order didapat,

$$\mathrm{P}(D_1 - U_1(q) \leq y) \geq \mathrm{P}(D_2 - U_2(q) \leq y), y \in (-\infty, \infty)$$

Sehingga menurut Lemma 3. iii) didapat

$$\mathrm{P}\big(D_1 - U_1(q) \leq r_1^*(q)\big) \geq \mathrm{P}\big(D_2 - U_2(q) \leq r_2^*(q)\big)$$

Lebih lanjut, karena $D_1 - U_1(q)$ dan $D_2 - U_2$ sama dalam hokum probabilitas maka didapat

$$r_1^*(q) \geq r_2^*(q) \blacksquare$$

Ini bermakna bahwa, semakin singkat waktu pemesanan stokastik dengan jumlah item yang dipilih, maka akan menghasilkan tingkat optimal pemesanan ulang yang lebih rendah.

Teorema : *Jika $L_1 \geq_{st} L_2$ maka untuk sebarang kebijakan (r,q) yang diberikan biaya rata-rata jangka panjang $c_i(r,q)$ dengan $i = 1,2$ memenuhi*

$$-h\lambda[E(L_1) - E(L_2)] \leq c_1(r,q) - c_2(r,q) \leq p\lambda[E(L_1) - E(L_2)].$$

Bukti :

Rata-rata permintaan selama waktu pesan $E\left[D_i\right] = E\left[X_i\right]E[L_i]$

Biaya rata-rata jangka panjang

$$c_i(r,q) = K\frac{E\left[X_i\right]}{q} + h\,E\left(\left[(r+q) - D_i\right]^+\right) + p\,E\left(\left[D_i - (r+q)\right]^+\right)$$

Akan ditentukan batas bawah diperhatikan

$$c_i(r,q) = K\frac{E\left[X_i\right]}{q} + h\,E\left(\left[(r+q) - D_i\right]^+\right) + p\,E\left(\left[D_i - (r+q)\right]^+\right)$$

$$= K\frac{E\left[X_i\right]}{q} + h\,E\left((r+q) - D_i\right) + (h+p)\,E\left(\left[D_i - (r+q)\right]^+\right)$$

Karena $L_1 \geq_{st} L_2$ maka $D_1 \geq_{st} D_2$. Hal ini berarti

$$E\left(\left[D_1 - (r+q)\right]^+\right) \geq E\left(\left[D_2 - (r+q)\right]^+\right)$$

Sehingga didapat

$$K\frac{E\left[X_1\right]}{q} + h\,E\left((r+q) - D_1\right) + (h+p)E\left(\left[D_1 - (r+q)\right]^+\right)$$

$$\geq K\frac{E\left[X_2\right]}{q} + h\,E\left((r+q) - D_2\right) + (h+p)\,E\left(\left[D_2 - (r+q)\right]^+\right)$$

$$\Leftrightarrow c_1(r,q) \geq c_2(r,q)$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$c_1(r,q) \geq c_2(r,q) \geq c_2(r,q) - h\,\lambda\,[E\left(L_1\right) - E(L_2)]$$

$$\Leftrightarrow -h\,\lambda\,[E\left(L_1\right) - E(L_2)] \leq c_1(r,q) - c_2(r,q)$$

Selanjutnya, untuk menentukan batas atas diperhatikan

$$c_i(r,q) = K\frac{E\left[X_i\right]}{q} + h\,E\left(\left[(r+q) - D_i\right]^+\right) + p\,E\left(\left[D_i - (r+q)\right]^+\right)$$

$$= K\frac{E\left[X_i\right]}{q} + (h+p)E\left(\left[(r+q) - D_i\right]^+\right) - p\,E\left((r+q) - D_i\right)$$

Karena $L_1 \geq_{st} L_2$ maka $D_1 \geq_{st} D_2$. Hal ini berarti

$$E\left(\left[(r+q) - D_1\right]^+\right) \leq E\left(\left[(r+q) - D_2\right]^+\right)$$

Sehingga didapat

$$K\frac{E\left[X_1\right]}{q}+(h+p)E\left(\left[(r+q)-D_1\right]^{+}\right)-p\,E\left((r+q)-D_1\right)$$

$$\leq K\frac{E\left[X_2\right]}{q}+(h+p)E\left(\left[(r+q)-D_2\right]^{+}\right)-p\,E\left((r+q)-D_2\right)$$

$$\Leftrightarrow c_1(r,q)\leq c_2(r,q)$$

Lebih lanjut diperoleh,

$$c_1(r,q)\leq c_2(r,q)\leq c_2(r,q)+p\,\lambda\,[E\left(L_1\right)-E(L_2)]$$

$$\Leftrightarrow c_1(r,q)-c_2(r,q)\leq p\,\lambda\,[E\left(L_1\right)-E(L_2)]$$

Oleh karena itu, dari persamaan (28) dan persamaan (29) didapat,

$$-h\,\lambda\,[E(L_1)-E(L_2)]\leq c_1(r,q)-c_2(r,q)\leq p\,\lambda\,[E(L_1)-E(L_2)]\blacksquare$$

Ketidaksamaan tersebut memberikan batas matematis yang melibatkan perbedaan energi $E(L_1)-E(L_2)$ antara dua level L_1 dan L_2 dikalikan dengan parameter seperti h,λ, dan p. Parameter $c_1(r,q)$ dan $c_2(r,q)$ merepresentasikan karakteristik sistem tertentu yang bergantung pada variabel r dan q.

Ketidaksamaan ini menunjukkan bahwa selisih antara $c_1(r,q)$ dan $c_2(r,q)$ berada dalam rentang yang ditentukan oleh batas bawah $-h\,\lambda\,[E(L_1)-E(L_2)]$ dan batas atas $p\,\lambda\,[E(L_1)-E(L_2)]$. Ketidaksamaan ini penting untuk memahami perilaku sistem berdasarkan perbedaan energi, yang mungkin relevan dalam model optimasi, pengendalian stok, atau sistem dinamis lainnya.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya, terdapat beberapa kesimpulan yang diperoleh dalam teori pembuktian teorema dan lemma.

1. Dampak dari menggunakan pesan singkat pada waktu pemesanan ulang $r^*(q)$, tingkat pemesanan optimal r^*+q^*, dan biaya rata-rata jangka panjang $c(r,q)$ menunjukkan penurunan yang signifikan.
2. Sistem persediaan (r,q) adalah bentuk yang umum dari sistem persediaan *base stock* karena biaya rata-rata sistem tersebut terdiri dari biaya pengadaan/pemesanan dan biaya *base stock* yang dijumlahkan.
3. Model persediaan probabilistik cenderung memiliki kesamaan yang lebih baik dengan kondisi sebenarnya daripada model deterministik.

REFERENSI

Bain, L. J. dan Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* California: Duxburry Press.

Baroto. 2002. *Perencanaan dan Pengendalian Produksi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.

Bartle dan Sherbert. 1999. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley dan Sons Inc, New York.

Bazaraa, M. S., Sherali, H.D., dan Shetty, C. 2006. *Nonlinier Programming*. John Wiley dan Sons Inc, Canada.

Boyd, S., dan Vandenberghe, L. 2004. *Convex Optimization*. Cambridge, New York.

Darwin. 2016. Pengaruh Waktu Pesan Dan Ketidakpastian Permintaan Pada Sistem Persediaan (r,q). UGM, Yogyakarta.

Federgruen,A.,Y.S. Zheng. 1992. An efficient algorithm for computing an optimal (r,q) policy in continuous review stochastic inventory systems. *Operation Research*. **40** 808-813.

Gallego, G. 1998. New bounds and heuristics for (q,r) policies. *Management Science*. **44** 219-233.

Harian Jogja, 8 Febuari 2016. Tahun 2015, Astra Motor Honda menjual 4,45 juta unit motor secara nasional.

Hogg dan Craig. 2004. *Introduction to Mathematical Statistics*. Higher Education Press, Republik China.

Leithold. 1976. *The Calculus with Analytic Geometry*. Publishers Inc, New York.

Mangasarian, Olvi L. 1994. *Nonlinier Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Shaked, M., Shanthikumar, G. 1994. *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press, London.

Song, J. S. 1994a. The effect of lead time uncertainty in a simple stochastic inventory model. *Management Science*. **40** 603-612.

Song, J. S., Zhang, H., Hou, Y., Wang, M. 2010. The effect of lead time and demand uncertainties in (r, q) inventory systems. *Operations Research.* **58** 68–80.

Subanar. 2013. *Statistika Matematika : Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Taylor, Mann. 1983. *Advanced Calculus*. John Wiley Inc, USA.

Walpole, R. E. 1992. *Pengantar Statistika*. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Winston. 1993. *Operations Research : Applications and Algorithms*. Thomson Learning Inc, Canada.